

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 25.11.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Решите систему уравнений в вещественных числах:
$$\begin{cases} x + y = z, \\ x^2 + y^2 = 4z, \\ x^3 + y^3 = 18z. \end{cases}$$

2. На клетчатой доске 28×28 все 28 клеток диагонали, идущей из левого верхнего угла доски в правый нижний, покрашены в чёрный цвет. Хромая ладья за один ход переходит из клетки в соседнюю с ней по стороне. Хромая ладья обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно один раз (в частности, она не возвращалась в начальную клетку). Докажите, что в какой-то момент ладья сошла с чёрной клетки, а следующим ходом пришла на чёрную.

3. Пусть p_i – i -е по счету простое число. Для каждого натурального k обозначим через a_k количество натуральных t , для которых k делится на $p_t p_{t+1}$. Докажите, что для любого натурального n

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{n}{3}.$$

4. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке B . Точка K выбирается внутри треугольника ABC . Прямые, проходящие через точку K параллельно BC и BA , пересекают ℓ в точках X и Y соответственно, причем $BX = BY$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABY и CBX пересекаются вторично на прямой BK .

5. Положительные числа a, b, c, d, e таковы, что $a + b + c + d + e = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$. Докажите, что

$$a + b + c + d + e \geq \sqrt{\frac{ab+1}{2}} + \sqrt{\frac{bc+1}{2}} + \sqrt{\frac{cd+1}{2}} + \sqrt{\frac{de+1}{2}} + \sqrt{\frac{ea+1}{2}}.$$

6. Назовём *нечётноцветиком* в графе G простой нечётный цикл, для любого ребра e которого верно, что существует другой простой нечётный цикл, имеющий с нечётноцветиком общее ребро e и более никаких общих вершин. Докажите, что если в графе нет нечётноцветика, то его вершины можно правильным образом раскрасить в 4 цвета.

7. Существуют ли различные нецелые вещественные числа $a > 1$, $b > 1$, для которых произведение $\lceil a^n \rceil \cdot \lceil b^n \rceil$ является квадратом при всех натуральных n ? Здесь $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее x .

8. Дан описанный выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , а прямые AD и BC в точке F . Внешние биссектрисы углов A и C и прямая EF образуют треугольник Δ_1 . Внешние биссектрисы углов B и D и прямая EF образуют треугольник Δ_2 . Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются.